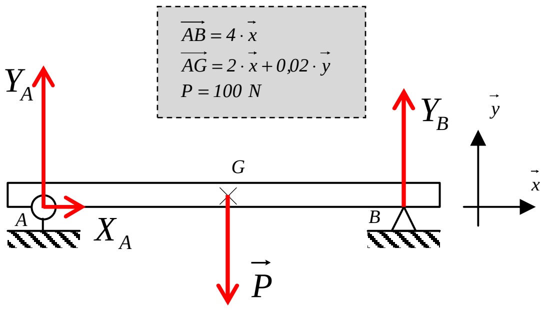
	MECANIQUE DU SOLIDE *Statique analytique*	**Chapitre 5** **EXERCICES** ***Feuille n°2*** **CORRECTION**

On considère une poutre articulée en A (type pivot ou rotule) et en appui simple en B (type ponctuelle), sauf exercices 5 et 6.

Exercices 1 à 4 : *calculer à l'aide du PFS les composantes sur* $\vec{x}$ *et* $\vec{y}$ *des réactions d'appui en* A *et* B*. Interpréter systématiquement le signe des résultats trouvés. Calculer les intensités* $\|\vec{A}\|$ *et* $\|\vec{B}\|$.

Le premier exercice est volontairement très détaillé. Les autres étant similaires, la correction se limite pour eux aux calculs.

Exercice 1



Toutes les distances sont en m.

Ecrivons déjà proprement le **BAME** :

Comme on adopte ici une méthode analytique, on ne fait pas de tableau (on réserve cette façon de faire pour la méthode graphique).

La poutre est soumise à 3 forces :

Composante NON nulle sur x **a priori** car la poutre est articulée en A, ce qui empêche la poutre de se déplacer sur l'axe x.

Composante nulle sur x car l'appui est simple, il n'empêche pas la poutre de se déplacer sur l'axe x.

$$\vec{A}\begin{vmatrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \vec{B}\begin{vmatrix} 0 \\ Y_B \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \vec{P}\begin{vmatrix} 0 \\ -100 \\ 0 \end{vmatrix}$$

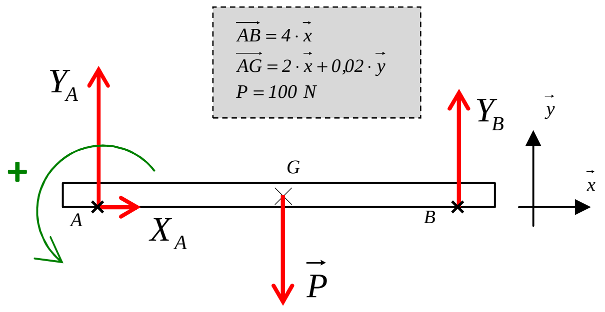
Le poids est toujours vertical vers le bas et la verticale positive est l'axe des y ascendants.
=> Rien sur les axes x et z et une valeur négative sur l'axe y.

Appliquons maintenant le Principe Fondamental de la Statique (**PFS**) :

Il s'agit d'appliquer les deux théorèmes, celui de la résultante et celui du moment.
D'un point de vue pratique, il est préférable de commencer par le théorème du moment car il aboutira à une équation à une inconnue qu'on pourra immédiatement résoudre. Si on commence par le théorème de la résultante (ce n'est pas interdit), on obtient une équation à deux inconnues qu'on ne peut pas résoudre immédiatement ; il faut dans ce cas « attendre » de poser le théorème du moment pour obtenir la seconde équation et résoudre le système de deux équations à deux inconnues ; rien d'insurmontable, mais bon, pas la peine de faire compliqué quand on peut faire simple…

Théorème du moment en A : (on a pris le point A pour calculer le moment des forces car c'est plus simple

On définit sur la figure un sens de rotation positif ; on prend celui qu'on veut mais ensuite on s'y tient pour toute l'étude. Ici, on a choisit le sens antihoraire, centré sur le point A puisque c'est le point qu'on a choisit pour calculer les moments.



$\sum M_A\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = 0$ <= on commence TOUJOURS par écrire cette **formule <u>algébrique</u>** type.

Soit,

$$M_A\left(\overrightarrow{X_A}\right) + M_A\left(\overrightarrow{Y_A}\right) + M_A\left(\vec{P}\right) + M_A\left(\overrightarrow{Y_B}\right) = 0 \qquad (1)$$

Avec :

$M_A\left(\overrightarrow{X_A}\right) = M_A\left(\overrightarrow{Y_A}\right) = 0$ car les composantes de $\vec{A}$ passent nécessairement par le point A.

$$M_A\left(\vec{P}\right) = -2 \times 100 = -200\ N \cdot m$$

$$M_A\left(\overrightarrow{Y_B}\right) = +4 \times Y_B$$

L'équation (1) donne alors :

$$-200 + 4 \times Y_B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Y_B = \frac{200}{4} = +50\ N \qquad \boxed{Y_B = +50\ N}$$

Interprétation du signe : $\boxed{Y_B > 0 \quad \Rightarrow \quad Y_B \text{ est bien vers le haut (axe des } \vec{y} \text{ positifs)}}$

Théorème de la résultante :

$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}$ <= on commence TOUJOURS par écrire cette **formule <u>vectorielle</u>** type.

Soit,

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{P} = \vec{0}$$

$$\begin{vmatrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -100 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

De l'équation vectorielle précédente, on en sort trois équations algébriques, une par axe ; on appelle ça les « équations de projection » :

Proj/ $\vec{x}$ → $X_A + 0 + 0 = 0 \quad \Rightarrow$ $\boxed{X_A = 0\ N}$

Interprétation du signe : 0 est l'élément neutre ; il n'y a pas de signe à interpréter.

Proj/ $\vec{y}$ → $Y_A + 50 - 100 = 0 \quad \Rightarrow$ $\boxed{Y_A = +50\ N}$

Interprétation du signe : $Y_A > 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A$ est bien vers le haut (axe des $\vec{y}$ positifs)

Proj/ $\vec{z}$ → $0 + 0 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$

Cette équation de projection est bien entendu juste, mais on voit qu'elle ne sert à rien ; on l'a écrite ici pour en parler mais, à l'avenir, on pourra se limiter à n'écrire que les équations utiles.

On remarque aussi l'égalité

Calcul de l'intensité des forces $\vec{A}$ et $\vec{B}$:

Attention : il ne faut pas confondre l'écriture « $\vec{A}$ » qui est un vecteur avec « A » qui est l'intensité du vecteur, c'est-à-dire un nombre.

A noter : l'intensité se note, au choix, $\|\vec{A}\|$ ou A ; la seconde écriture étant plus légère, elle sera adoptée.

$$A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} = \sqrt{0^2 + 50^2 + 0^2} = 50\ N \qquad \boxed{A = 50\ N}$$

Ne pas oublier l'unité

Compte tenu du calcul, on notera que l'intensité d'un vecteur (ici un vecteur force) est <u>TOUJOURS</u> positive.

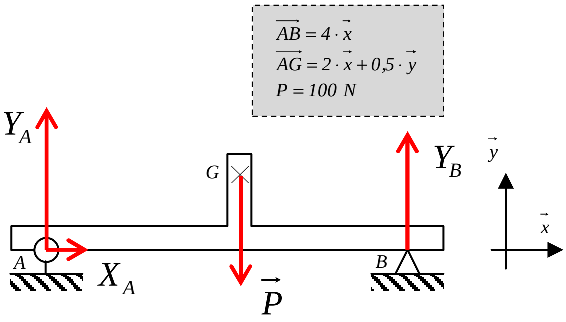
$$B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2 + Z_B^2} = \sqrt{0^2 + 50^2 + 0^2} = 50\ N \qquad \boxed{B = 50\ N}$$

<u>Remarque</u> : on remarque l'égalité des intensités des réactions d'appui ; on pouvait s'en douter car les appuis aux points A et B sont à égale distance du poids appliqué en G.

Voilà, l'exercice 1 est terminé !

Les suivants seront beaucoup moins détaillés…

Exercice 2



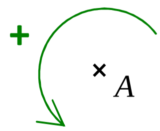
⇨ **BAME** :

La poutre est soumise à 3 forces :

$$\vec{A}\left|\begin{array}{l} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{array}\right. \qquad \vec{B}\left|\begin{array}{l} 0 \\ Y_B \\ 0 \end{array}\right. \qquad \vec{P}\left|\begin{array}{c} 0 \\ -100 \\ 0 \end{array}\right.$$

⇨ **PFS** :

Théorème du moment en A :



$$\sum M_A\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = 0$$

$$M_A\left(\overrightarrow{X_A}\right) + M_A\left(\overrightarrow{Y_A}\right) + M_A\left(\vec{P}\right) + M_A\left(\overrightarrow{Y_B}\right) = 0 \qquad (1)$$

Avec :

$M_A\left(\overrightarrow{X_A}\right) = M_A\left(\overrightarrow{Y_A}\right) = 0$ car les composantes de $\vec{A}$ passent nécessairement par le point A.

$$M_A\left(\vec{P}\right) = -2 \times 100 = -200\ N \cdot m$$

$$M_A\left(\overrightarrow{Y_B}\right) = +4 \times Y_B$$

L'équation (1) donne alors :

$$-200 + 4 \times Y_B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Y_B = \frac{200}{4} = +50\ N$$

$$\boxed{Y_B = +50\ N}$$

Interprétation du signe : $\boxed{Y_B > 0 \quad \Rightarrow \quad Y_B \text{ est bien vers le haut (axe des } \vec{y} \text{ positifs)}}$

Théorème de la résultante :

$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}$ <= on commence TOUJOURS par écrire cette **formule** **vectorielle** type.

Soit,

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{P} = \vec{0}$$

$$\begin{vmatrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -100 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Proj/ $\vec{x}$ → $X_A + 0 + 0 = 0 \Rightarrow$ $\boxed{X_A = 0\ N}$

Interprétation du signe : 0 est l'élément neutre ; il n'y a pas de signe à interpréter.

Proj/ $\vec{y}$ → $Y_A + 50 - 100 = 0 \Rightarrow$ $\boxed{Y_A = +50\ N}$

Interprétation du signe : $Y_A > 0 \Rightarrow$ Y_A est bien vers le haut (axe des $\vec{y}$ positifs)

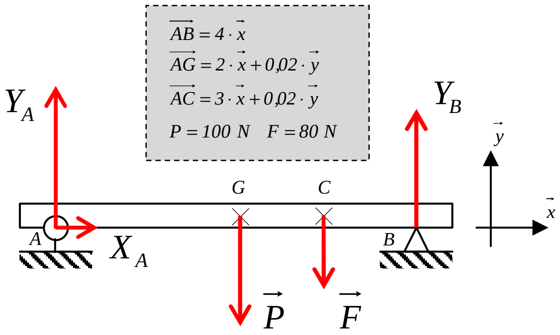
Calcul de l'intensité des forces $\vec{A}$ et $\vec{B}$:

$A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} = \sqrt{0^2 + 50^2 + 0^2} = 50\ N$ $\boxed{A = 50\ N}$

$B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2 + Z_B^2} = \sqrt{0^2 + 50^2 + 0^2} = 50\ N$ $\boxed{B = 50\ N}$

A noter : on retrouve les mêmes résultats qu'à l'exercice n°1 malgré le fait que le poids P soit appliqué « plus haut » (comparer les figures des deux exercices) ; le décalage de 0,5 m du oint G n'a aucune incidence sur les résultats. Il aurait pu être beaucoup plus haut ou beaucoup plus bas, ça ne change rien. Le poids peut donc « glisser » sur la direction (la verticale), il n'y a pas d'incidence ; ceci justifie le terme souvent employé de « GLISSEUR ».

Exercice 3



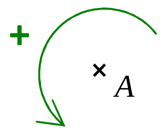
➪ **BAME** :

La poutre est soumise à 4 forces :

$$\vec{A}\left|\begin{array}{l} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{array}\right. \qquad \vec{B}\left|\begin{array}{l} 0 \\ Y_B \\ 0 \end{array}\right. \qquad \vec{P}\left|\begin{array}{c} 0 \\ -100 \\ 0 \end{array}\right. \qquad \vec{F}\left|\begin{array}{c} 0 \\ -80 \\ 0 \end{array}\right.$$

➪ **PFS** :

Théorème du moment en A :



$$\sum M_A\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = 0$$

$$M_A\left(\overrightarrow{X_A}\right) + M_A\left(\overrightarrow{Y_A}\right) + M_A\left(\overrightarrow{Y_P}\right) + M_A\left(\overrightarrow{Y_F}\right) + M_A\left(\overrightarrow{Y_B}\right) = 0 \qquad (1)$$

Avec :

$$M_A\left(\overrightarrow{X_A}\right) = M_A\left(\overrightarrow{Y_A}\right) = 0$$

$$M_A\left(\overrightarrow{Y_P}\right) = -2 \times 100 = -200\ N \cdot m$$

$$M_A\left(\overrightarrow{Y_F}\right) = -3 \times 80 = -240\ N \cdot m$$

$$M_A\left(\overrightarrow{Y_B}\right) = +4 \times Y_B$$

L'équation (1) donne alors :

$$-200 - 240 + 4 \times Y_B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Y_B = \frac{440}{4} = +110\ N$$

$$\boxed{Y_B = +110\ N}$$

Interprétation du signe : $\boxed{Y_B > 0 \quad \Rightarrow \quad Y_B \text{ est bien vers le haut (axe des } \vec{y} \text{ positifs)}}$

Théorème de la résultante :

$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}$ <= on commence TOUJOURS par écrire cette **formule** **vectorielle** type.

Soit,

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$$

$$\begin{vmatrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 110 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -100 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -80 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Proj/ $\vec{x}$ → $X_A + 0 + 0 = 0 \quad \Rightarrow$ $\boxed{X_A = 0\ N}$

Interprétation du signe : 0 est l'élément neutre ; il n'y a pas de signe à interpréter.

Proj/ $\vec{y}$ → $Y_A + 110 - 100 - 80 = 0 \quad \Rightarrow$ $\boxed{Y_A = +70\ N}$

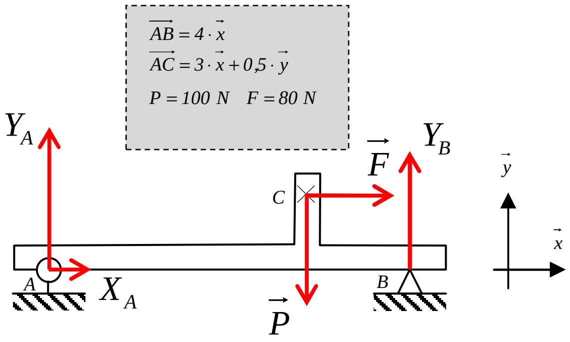
Interprétation du signe : $Y_A > 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A$ est bien vers le haut (axe des $\vec{y}$ positifs)

Calcul de l'intensité des forces $\vec{A}$ et $\vec{B}$:

$$A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} = \sqrt{0^2 + 70^2 + 0^2} = 70\ N \qquad \boxed{A = 70\ N}$$

$$B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2 + Z_B^2} = \sqrt{0^2 + 110^2 + 0^2} = 110\ N \qquad \boxed{B = 110\ N}$$

Exercice 4



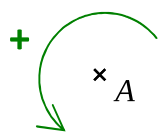
⇨ **BAME** :

La poutre est soumise à 4 forces :

$$\vec{A}\left|\begin{matrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{matrix}\right. \qquad \vec{B}\left|\begin{matrix} 0 \\ Y_B \\ 0 \end{matrix}\right. \qquad \vec{P}\left|\begin{matrix} 0 \\ -100 \\ 0 \end{matrix}\right. \qquad \vec{F}\left|\begin{matrix} +80 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right.$$

⇨ **PFS** :

Théorème du moment en A :



$$\sum M_A\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = 0$$

$$M_A\left(\overrightarrow{X_A}\right) + M_A\left(\overrightarrow{Y_A}\right) + M_A\left(\overrightarrow{Y_P}\right) + M_A\left(\overrightarrow{X_F}\right) + M_A\left(\overrightarrow{Y_B}\right) = 0 \qquad (1)$$

Avec :

$$M_A\left(\overrightarrow{X_A}\right) = M_A\left(\overrightarrow{Y_A}\right) = 0$$

$$M_A\left(\overrightarrow{Y_P}\right) = -3 \times 100 = -300\ N \cdot m$$

$$M_A\left(\overrightarrow{X_F}\right) = -0{,}5 \times 80 = -40\ N \cdot m$$

$$M_A\left(\overrightarrow{Y_B}\right) = +4 \times Y_B$$

L'équation (1) donne alors :

$$-300 - 40 + 4 \times Y_B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Y_B = \frac{340}{4} = +85\ N$$

$$\boxed{Y_B = +85\ N}$$

Interprétation du signe : $\boxed{Y_B > 0 \quad \Rightarrow \quad Y_B \text{ est bien vers le haut (axe des } \vec{y} \text{ positifs)}}$

Théorème de la résultante :

$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}$ <= on commence TOUJOURS par écrire cette **formule** **vectorielle** type.

Soit,

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$$

$$\begin{vmatrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 85 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -100 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 80 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Proj/ $\vec{x}$ → $X_A + 80 = 0 \Rightarrow$ $\boxed{X_A = -80\ N}$

Interprétation du signe : $X_A < 0 \Rightarrow X_A$ est vers la gauche.

Proj/ $\vec{y}$ → $Y_A + 85 - 100 = 0 \Rightarrow$ $\boxed{Y_A = +15\ N}$

Interprétation du signe : $Y_A > 0 \Rightarrow Y_A$ est bien vers le haut (axe des $\vec{y}$ positifs)

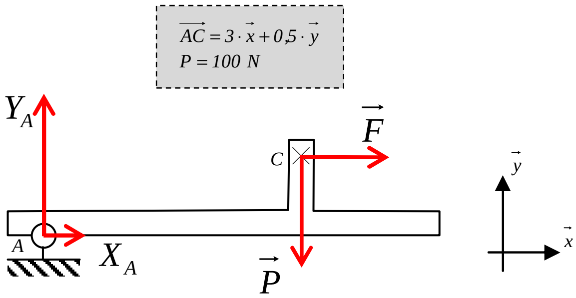
Calcul de l'intensité des forces $\vec{A}$ et $\vec{B}$:

$A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} = \sqrt{(-80)^2 + 15^2 + 0^2} = 81{,}4\ N$ $\boxed{A = 81{,}4\ N}$

$B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2 + Z_B^2} = \sqrt{0^2 + 85^2 + 0^2} = 85\ N$ $\boxed{B = 85\ N}$

Exercices 5 et 6 : *calculer à l'aide du PFS les composantes sur $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de la réaction en A et de $\vec{F}$ pour avoir l'équilibre du système dans la position donnée. Interpréter systématiquement le signe des résultats trouvés. Calculer les intensités de $\vec{A}$ et $\vec{F}$.*

Exercice 5



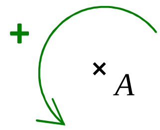
⇨ **BAME** :

La poutre est soumise à 3 forces :

$$\vec{A}\left|\begin{array}{l} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{array}\right. \qquad \vec{P}\left|\begin{array}{l} 0 \\ -100 \\ 0 \end{array}\right. \qquad \vec{F}\left|\begin{array}{l} X_F \\ 0 \\ 0 \end{array}\right.$$

⇨ **PFS** :

Théorème du moment en A :



$$\sum M_A\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = 0$$

$$M_A\left(\overrightarrow{X_A}\right) + M_A\left(\overrightarrow{Y_A}\right) + M_A\left(\overrightarrow{Y_P}\right) + M_A\left(\overrightarrow{X_F}\right) = 0 \qquad (1)$$

Avec :

$$M_A\left(\overrightarrow{X_A}\right) = M_A\left(\overrightarrow{Y_A}\right) = 0$$

$$M_A\left(\overrightarrow{Y_P}\right) = -3\times 100 = -300\ N\cdot m$$

$$M_A\left(\overrightarrow{X_F}\right) = -0{,}5\times X_F$$

L'équation (1) donne alors :

$$-300 - 0{,}5\times X_F = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X_F = -\frac{300}{0{,}5} = -600\ N$$

$$\boxed{X_F = -600\ N}$$

Interprétation du signe : $\boxed{X_F < 0 \quad \Rightarrow \quad X_F \text{ est vers la gauche.}}$

Théorème de la résultante :

$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}$ <= on commence TOUJOURS par écrire cette **formule vectorielle** type.

Soit,

$$\vec{A} + \vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$$

$$\begin{vmatrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -100 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -600 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Proj/ $\vec{x}$ → $X_A - 600 = 0 \Rightarrow$ $\boxed{X_A = +600\ N}$

Interprétation du signe : $\boxed{X_A > 0 \Rightarrow X_A \text{ est vers la droite.}}$

Proj/ $\vec{y}$ → $Y_A - 100 = 0 \Rightarrow$ $\boxed{Y_A = +100\ N}$

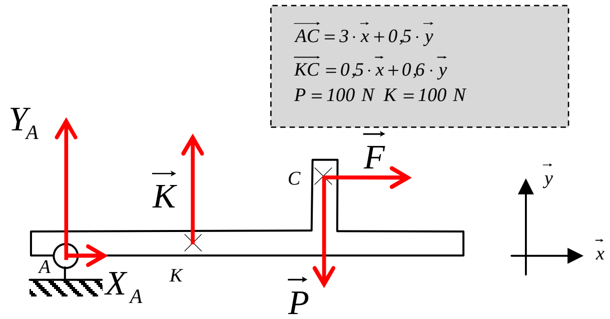
Interprétation du signe : $\boxed{Y_A > 0 \Rightarrow Y_A \text{ est bien vers le haut (axe des } \vec{y} \text{ positifs)}}$

Calcul de l'intensité des forces $\vec{A}$ et $\vec{B}$:

$A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} = \sqrt{600^2 + 100^2 + 0^2} = 608{,}3\ N$ $\boxed{A = 608{,}3\ N}$

$F = \sqrt{X_F^2 + Y_F^2 + Z_F^2} = \sqrt{(-600)^2 + 0^2 + 0^2} = 600\ N$ $\boxed{F = 600\ N}$

Exercice 6



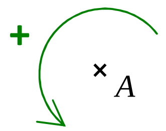
⇨ **BAME** :

La poutre est soumise à 4 forces :

$$\vec{A}\begin{vmatrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \vec{P}\begin{vmatrix} 0 \\ -100 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \vec{K}\begin{vmatrix} 0 \\ +100 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \vec{F}\begin{vmatrix} X_F \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

⇨ **PFS** :

Théorème du moment en A :



$$\sum M_A\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = 0$$

$$M_A\left(\overrightarrow{X_A}\right) + M_A\left(\overrightarrow{Y_A}\right) + M_A\left(\overrightarrow{Y_P}\right) + M_A\left(\overrightarrow{Y_K}\right) + M_A\left(\overrightarrow{X_F}\right) = 0 \qquad (1)$$

Avec :

$$M_A\left(\overrightarrow{X_A}\right) = M_A\left(\overrightarrow{Y_A}\right) = 0$$

$$M_A\left(\overrightarrow{Y_P}\right) = -3 \times 100 = -300\ N \cdot m$$

$$M_A\left(\overrightarrow{Y_K}\right) = +2,5 \times 100 = 2500\ N \cdot m$$

$$M_A\left(\overrightarrow{X_F}\right) = -0,5 \times X_F$$

L'équation (1) donne alors :

$$-300 + 2500 - 0,5 \times X_F = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X_F = -\frac{2200}{0,5} = -4400\ N$$

$$\boxed{X_F = -4400\ N}$$

Interprétation du signe : $\boxed{X_F < 0 \quad \Rightarrow \quad X_F \text{ est vers la gauche.}}$

Théorème de la résultante :

$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}$ <= on commence TOUJOURS par écrire cette **formule** **vectorielle** type.

Soit,

$$\vec{A} + \vec{P} + \vec{F} + \vec{K} = \vec{0}$$

$$\begin{vmatrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -100 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -4400 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Proj/$\vec{x}$ → $X_A - 4400 = 0 \Rightarrow$ $\boxed{X_A = +4400\ N}$

Interprétation du signe : $X_A > 0 \Rightarrow X_A$ est vers la droite.

Proj/$\vec{y}$ → $Y_A - 100 + 100 = 0 \Rightarrow$ $\boxed{Y_A = 0\ N}$

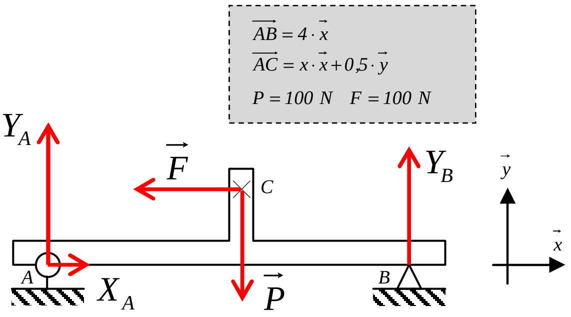
Calcul de l'intensité des forces $\vec{A}$ et $\vec{B}$:

$A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} = \sqrt{4400^2 + 0^2 + 0^2} = 4400\ N$ $\boxed{A = 4400\ N}$

$F = \sqrt{X_F^2 + Y_F^2 + Z_F^2} = \sqrt{(-4400)^2 + 0^2 + 0^2} = 4400\ N$ $\boxed{F = 4400\ N}$

Exercices 7 et 8 : *calculer à l'aide du PFS la cote* x *et les composantes sur* $\vec{x}$ *et* $\vec{y}$ *des réactions en* A *et* B *pour avoir* $Y_B = 0{,}5 \cdot Y_A$. *Interpréter systématiquement le signe des résultats trouvés. Calculer l'intensité de* $\vec{A}$.

Exercice 7



⇨ **BAME** :

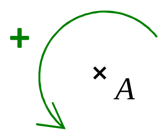
La poutre est soumise à 4 forces :

$$\vec{A}\left|\begin{array}{l} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{array}\right. \qquad \vec{P}\left|\begin{array}{c} 0 \\ -100 \\ 0 \end{array}\right. \qquad \vec{B}\left|\begin{array}{l} 0 \\ Y_B \\ 0 \end{array}\right. \qquad \vec{F}\left|\begin{array}{c} -100 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right.$$

Signe…

⇨ **PFS** :

Théorème du moment en A :



$$\sum M_A\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = 0$$

$$M_A\left(\overrightarrow{X_A}\right) + M_A\left(\overrightarrow{Y_A}\right) + M_A\left(\overrightarrow{Y_P}\right) + M_A\left(\overrightarrow{Y_B}\right) + M_A\left(\overrightarrow{X_F}\right) = 0 \qquad (1)$$

Avec :

$$M_A\left(\overrightarrow{X_A}\right) = M_A\left(\overrightarrow{Y_A}\right) = 0$$

$$M_A\left(\overrightarrow{Y_P}\right) = -100 \times x$$

L'inconnue géométrique « x » apparaît ici…

$$M_A\left(\overrightarrow{X_F}\right) = +0{,}5 \times 100$$

$$M_A\left(\overrightarrow{Y_B}\right) = +4 \times Y_B$$

L'équation (1) donne alors :

$$-100 \times x + 0{,}5 \times 100 + 4 \times Y_B = 0$$
$$-100 \times x + 50 + 4 \times Y_B = 0$$

2 inconnues ; on ne peut pas résoudre juste avec 1 équation…

Continuons…

Théorème de la résultante :

$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}$ <= on commence TOUJOURS par écrire cette **formule** **vectorielle** type.

Soit,

$$\vec{A} + \vec{P} + \vec{F} + \vec{B} = \vec{0}$$

$$\begin{vmatrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -100 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ Y_B \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Proj/ $\vec{x}$ → $X_A - 100 = 0 \Rightarrow$ $\boxed{X_A = +100\ N}$

Interprétation du signe : $X_A > 0 \Rightarrow X_A$ est vers la droite.

Proj/ $\vec{y}$ → $Y_A - 100 + Y_B = 0$

Utilisons la relation $Y_B = 0{,}5 \cdot Y_A$ qui est donnée par l'énoncé :

Cela donne un système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} -100 \times x + 50 + 4 \times Y_B = 0 \\ Y_A - 100 + Y_B = 0 \\ Y_B = 0{,}5 \cdot Y_A \end{cases}$$

Résolution du système d'équations :

$$\begin{cases} Y_A - 100 + Y_B = 0 \\ Y_B = 0{,}5 \cdot Y_A \end{cases} \Leftrightarrow Y_A - 100 + 0{,}5 \cdot Y_A = 0 \Rightarrow Y_A = +\frac{100}{1{,}5} = 66{,}7\ N \qquad \boxed{Y_A = +66{,}7\ N}$$

Interprétation du signe : $Y_A > 0 \Rightarrow Y_A$ est vers le haut.

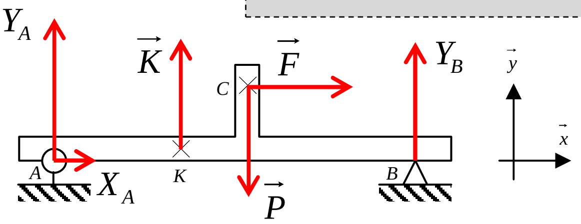
$$Y_B = 0{,}5 \cdot Y_A = 0{,}5 \times 66{,}7 = 33{,}3\ N \qquad \boxed{Y_B = +33{,}4\ N}$$

$$-100 \times x + 50 + 4 \times Y_B = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-50 - 4 \times 33{,}4}{-100} = 1{,}8\ m \qquad \boxed{x = 1{,}8\ m}$$

Calcul de l'intensité de la force $\vec{A}$: $A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} = \sqrt{100^2 + 66{,}7^2 + 0^2} = 120{,}2\ N$ $\boxed{A = 120{,}2\ N}$

Exercice 8

$\overrightarrow{AB} = 4 \cdot \vec{x}$
$\overrightarrow{AC} = x \cdot \vec{x} + 0{,}5 \cdot \vec{y} \quad \overrightarrow{KC} = 0{,}2 \cdot \vec{x} + 0{,}48 \cdot \vec{y}$
$P = 100\ N \quad F = 100\ N \quad K = 100\ N$



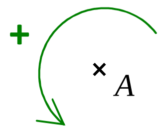
⇨ **BAME** :

La poutre est soumise à 5 forces :

$$\vec{A}\left|\begin{array}{l} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{array}\right. \qquad \vec{P}\left|\begin{array}{c} 0 \\ -100 \\ 0 \end{array}\right. \qquad \vec{B}\left|\begin{array}{l} 0 \\ Y_B \\ 0 \end{array}\right. \qquad \vec{F}\left|\begin{array}{c} +100 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right. \qquad \vec{K}\left|\begin{array}{c} 0 \\ +100 \\ 0 \end{array}\right.$$

⇨ **PFS** :

Théorème du moment en A :



$$\sum M_A\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = 0$$

$$M_A\left(\overrightarrow{X_A}\right) + M_A\left(\overrightarrow{Y_A}\right) + M_A\left(\overrightarrow{Y_P}\right) + M_A\left(\overrightarrow{Y_K}\right) + M_A\left(\overrightarrow{Y_B}\right) + M_A\left(\overrightarrow{X_F}\right) = 0 \qquad (1)$$

Avec :

$$M_A\left(\overrightarrow{X_A}\right) = M_A\left(\overrightarrow{Y_A}\right) = 0$$

$$M_A\left(\overrightarrow{Y_P}\right) = -100 \times x$$ ⚠ L'inconnue géométrique « x » apparaît ici…

$$M_A\left(\overrightarrow{Y_K}\right) = +100 \times (x - 0{,}2)$$ ⚠ Et ici…

$$M_A\left(\overrightarrow{X_F}\right) = -0{,}5 \times 100$$

$$M_A\left(\overrightarrow{Y_B}\right) = +4 \times Y_B$$

L'équation (1) donne alors :

$$-100 \times x + 100 \times (x - 0{,}2) - 0{,}5 \times 100 + 4 \times Y_B = 0$$
$$-100 \times x + 100 \times x - 100 \times 0{,}2 - 50 + 4 \times Y_B = 0$$
$$-70 + 4 \times Y_B = 0$$
$$Y_B = \frac{70}{4} = 17{,}5\ N$$

$$\boxed{Y_B = +17{,}5\ N}$$

Interprétation du signe : $\boxed{Y_B > 0 \quad \Rightarrow \quad Y_B \text{ est vers le haut.}}$

Théorème de la résultante :

$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}$ <= on commence TOUJOURS par écrire cette **formule** **<u>vectorielle</u>** type.

Soit,

$$\vec{A} + \vec{P} + \vec{K} + \vec{F} + \vec{B} = \vec{0}$$

$$\begin{vmatrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -100 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ Y_B \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Proj/ $\vec{x}$ → $X_A + 100 = 0 \Rightarrow$ $\boxed{X_A = -100\ N}$

Interprétation du signe : $\boxed{X_A < 0 \Rightarrow X_A \text{ est vers la gauche.}}$

Proj/ $\vec{y}$ → $Y_A - 100 + 100 + Y_B = 0 \Leftrightarrow Y_A + Y_B = 0$

Utilisons la relation $Y_B = 0{,}5 \cdot Y_A$ qui est donnée par l'énoncé :

Cela donne un système de 2 équations à 2 inconnues :

$$\begin{cases} Y_A + Y_B = 0 \\ Y_B = 0{,}5 \cdot Y_A \end{cases}$$

Résolution du système d'équations :

$Y_A + 0{,}5 \cdot Y_A = 0 \Rightarrow Y_A = 0\ N$ $\boxed{Y_A = 0\ N}$

$Y_B = 0{,}5 \cdot Y_A = 0{,}5 \times 0 = 0\ N$ $\boxed{Y_B = 0\ N}$

Calcul de l'intensité de la force $\vec{A}$: $A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} = \sqrt{(-100)^2 + 0^2 + 0^2} = 100\ N$ $\boxed{A = 100\ N}$

Calcul de l'intensité de la force $\vec{B}$: $B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2 + Z_B^2} = \sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2} = 0\ N$ $\boxed{B = 0\ N}$

On remarquera que la cote x « s'en va » des calculs ; cela signifie que les intensités des forces sont au final indépendante de la valeur de la cote x.